OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 22 februarie 2025

Clasa a V -a

Barem de corectare și notare

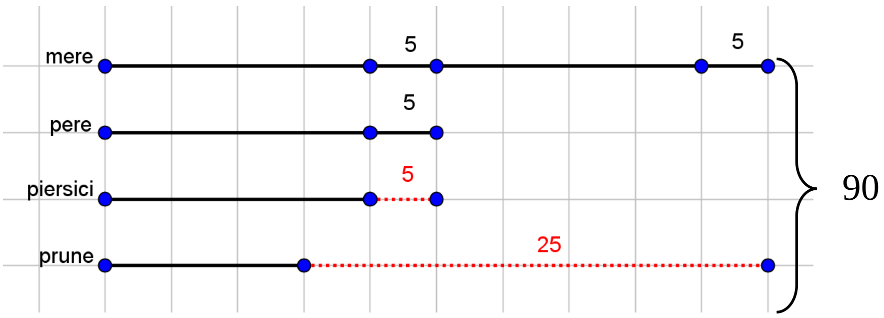
Problema 1

Într-un coș sunt patru feluri de fructe: mere, pere, prune și piersici, în total 90 de fructe.

Știm că sunt de două ori mai multe mere decât pere, piersici cu cinci mai puține decât pere, iar prune cu 25 mai puține decât mere.

Arătați că în coș sunt tot atâtea piersici câte prune.

BAREM:



1p
1p
1p
1p

90 + 25 + 5 = 120 .... **1p**

120 : 6 = 20 pere, 20 · 2 = 40 mere **1p**

20 – 5 = 15 piersici, 40 – 25 = 15 prune, deci sunt tot atâtea piersici câte prune **1p**

Problema 2

Se consideră numerele naturale

$$\boldsymbol{a = 2 \cdot (3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{47}) + 3} \quad \text{și}$$

$$\boldsymbol{b = 4 \cdot (5 + 5^2 + 5^3 + \cdots + 5^{23}) + 5}$$

Determinați numărul natural k pentru care are loc relația: $a \cdot b = 2025^k$.

(SGM 11/2024)

BAREM:

$a = 3^{48}$ **2p**

$b = 5^{24}$ **2p**

$a \cdot b = 3^{48} \cdot 5^{24} = (3^2)^{24} \cdot 5^{24} = 9^{24} \cdot 5^{24} = (9 \cdot 5)^{24} = 45^{24} = (45^2)^{12} = 2025^{12}$ **2p**

$2025^{12} = 2025^k \Rightarrow k = 12$ **1p**

Problema 3

Mihai scrie pe tablă numărul $A = \underbrace{7050301705030170\ldots}_{2025\ cifre}$

a) Care este a 40 a cifră pe care o scrie Mihai pe tablă.

b) Arătați că ultima cifră a numărului A este 0.

c) Stabiliți dacă numărul A poate fi pătrat perfect.

BAREM:

a) $40:7 = 5\ rest\ 5$ **1p**

Cea de-a $40 -$a cifră scrisă este 3 .... **1p**

b) $2025:7 = 289\ rest\ 2$ **1p**

Ultima cifră scrisă de Mihai este 0 .... **1p**

c) Suma cifrelor numărului A este: $289 \cdot (7+0+5+0+3+0+1)+7+0 = 4631$ **2p**

Restul împărțirii numărului A la 3 este 2, deci numărul nu este pătrat perfect **1p**

Problema 4

Determinați toate pătratele perfecte de forma $\overline{abac}$ cu suma cifrelor 9 și care dacă le împărțim la numărul $\overline{ab}$ obținem restul nenul c.

BAREM:

Dacă $c < b \Rightarrow$ câtul împărțirii va fi $100 \Rightarrow \overline{abac} = 100 \cdot \overline{ab} + c \Rightarrow \overline{abac} = \overline{ab0c}$

$\Rightarrow a = 0$, care nu convine **1p**

Dacă $c \geq b \Rightarrow$ câtul împărțirii va fi 101 și $\overline{abac} = 101 \cdot \overline{ab} + c \Rightarrow b = 0$ **2p**

Cum $\overline{a0ac}$ este pătrat perfect și $c \neq 0$, atunci $c \in \{1,4,5,6,9\}$ **1p**

Cum $2a + c = 9\ și\ a \neq 0 \Rightarrow c - cifra\ impară \Rightarrow c \in \{1,5\}$ **1p**

$c = 1 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow \overline{abac} = 4041$ care nu convine pentru că $63^2 < 4041 < 64^2$ **1p**

$c = 5 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow \overline{abac} = 2025 = 45^2$ **1p**