

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ  
Etapa locală – 22 februarie 2025  
Clasa a VI-a

## Barem de corectare și notare

## Problema 1

a) Dacă  $\frac{2x}{y+z} = \frac{3y}{x+3z} = \frac{4z}{x+2y}$  și  $x + y + z = 18$

Aflați numerele *naturale*  $x, y, z$ b) Arătați că numărul  $\overline{xyz}^{2025}$  poate fi scris ca sumă de trei pătrate perfecte

## BAREM:

a) Din  $\frac{2x}{y+z} = \frac{3y}{x+3z} = \frac{4z}{x+2y} = \frac{2x+3y+4z}{y+z+x+3z+x+2y} = \frac{2x+3y+4z}{2x+3y+4z} = 1$  ..... 1p

Din  $\begin{cases} \frac{2x}{y+z} = 1 \\ x + y + z = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = y + z \\ x + 2x = 18 \Rightarrow \\ 3x = 18 \Rightarrow x = 6 \end{cases}$  ..... 1p

Din  $\frac{3y}{x+3z} = 1 \Rightarrow 3y = x + 3z \Rightarrow 3y = 6 + 3z : 3 \Rightarrow y = 2 + z$

Din  $y + z = 12 \Rightarrow 2 + z + z = 12 \Rightarrow 2z = 10 \Rightarrow z = 5$  ..... 1p

Din  $y = 2 + z \Rightarrow y = 7$  ..... 1p

b)  $\overline{xyz}^{2025} = 675^{2025} = (675^{1012})^2 \cdot 675 =$  ..... 1p  
 $= (675^{1012})^2 \cdot (25^2 + 7^2 + 1^2) =$  ..... 1p  
 $= (675^{1012} \cdot 25)^2 + (675^{1012} \cdot 7)^2 + (675^{1012})^2$  ..... 1p

## Problema 2

Împărțind un număr natural  $n$ , pe rând, la 6, la 8 și la 10 obținem câturi nenule și resturile 1, 3, respectiv 5.a) Verificați dacă numărul  $n$  poate fi egal cu 835.b) Aflați cel mai mic număr natural  $n$  divizibil cu 7 care satisface simultan condițiile din enunț.

## BAREM:

a)  $835 : 6 = 139$  rest 1,  $835 : 8 = 104$  rest 3,  $835 : 10 = 83$  rest 5, ..... 1p  
deci  $n$  poate fi egal cu 835 ..... 1p

b)

$$\begin{cases} n : 6 = a \text{ rest } 1 \\ n : 8 = b \text{ rest } 3 \\ n : 10 = c \text{ rest } 5 \end{cases}$$
 ..... 1p

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 6a + 1 \\ n = 8b + 3 \\ n = 10c + 5 \end{cases}$$
 ..... 1p

$$\begin{cases} n + 5 = 6(a + 1) \\ n + 5 = 8(b + 1) \\ n + 5 = 10(c + 1) \end{cases}$$
 ..... 1p

$n + 5 \in M_{cm(6;8;10)}, n + 5 \in M_{120}$  ..... 1p

$n \in \{115, 235, 355, 475, 595, 715, 835, 955, \dots\}$ . Dar,  $n : 7$ , deci  $n = 595$  ..... 1p

**Problema 3**

**Determinați mulțimea**

$$A = \{\overline{ab/a}, b \text{ sunt cifre nenule și } ab \text{ este divizibil cu } a + b\}$$

(Gazeta Matematicii-nr. 9/2024)

**BAREM:**

ab:  $(a + b) \Rightarrow ab = (a + b)x$

Dacă  $a = b \Rightarrow a^2 = 2ax \Rightarrow a = 2x \Rightarrow a - \text{cifră pară} \Rightarrow \text{nr. } 22,44,66,88 \dots 2p$

Dacă  $x = 1 \Rightarrow ab = (a + b) \Rightarrow ab - a = b \Rightarrow a(b - 1) = b \Rightarrow$

$$a = \frac{b}{b-1} = \frac{b-1+1}{b-1} = 1 + \frac{1}{b-1} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases} \dots 1p$$

Dacă  $x = 2 \Rightarrow ab = 2(a + b) \Rightarrow ab - 2a = 2b \Rightarrow a(b - 2) = 2b \Rightarrow$

$$a = \frac{2b-4+4}{b-2} = 2 + \frac{4}{b-2} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 6 \end{cases}, \begin{cases} b = 6 \\ a = 3 \end{cases} \dots 2p$$

Dacă  $x = 3 \Rightarrow ab = 3(a + b) \Rightarrow ab - 3a = 3b \Rightarrow a(b - 3) = 3b \Rightarrow$

$$a = \frac{3b}{b-3} = \frac{3b-9+9}{b-3} = 3 + \frac{9}{b-3} \Rightarrow \begin{cases} b = 6 \\ a = 6 \end{cases} \dots 1p$$

Dacă  $x = 4 \Rightarrow ab = 4(a + b) \Rightarrow ab - 4a = 4b \Rightarrow a(b - 4) = 4b \Rightarrow$

$$a = \frac{4b}{b-4} = \frac{4b-16+16}{b-4} = 4 + \frac{16}{b-4} \Rightarrow \begin{cases} b = 8 \\ a = 8 \end{cases} \dots 1p$$

$$A = \{22,44,36,63,66,88\}$$

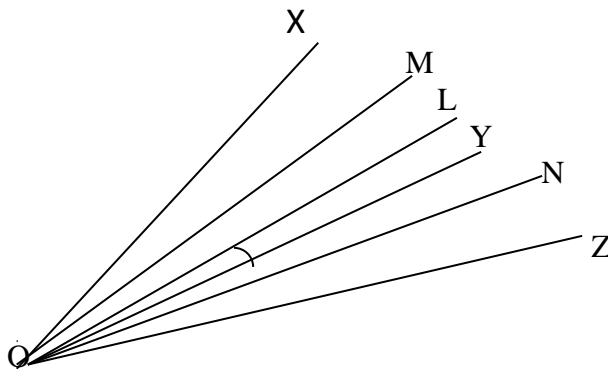
**Problema 4**

Se dau unghiurile adiacente  $\sphericalangle XOY$  și  $\sphericalangle YOZ$  astfel încât bisectoarele lor  $[OM$ , respectiv  $[ON$  să formeze un unghi cu măsura de  $25^\circ$ .

a) Determinați măsurile unghiurilor  $\sphericalangle XOY$  și  $\sphericalangle YOZ$  dacă  $12 \cdot (\sphericalangle XOY) = 13 \cdot (\sphericalangle YOZ)$

b) Dacă  $[OL$  este bisectoarea  $\sphericalangle MON$ , arătați că măsura  $(\sphericalangle LOY) < 1^\circ$

**BAREM:**



Desen corect ..... 1p

a)  $\sphericalangle XOZ = 2 \cdot (\sphericalangle MON) = 50^\circ \dots 1p$

$(\sphericalangle XOY) + (\sphericalangle YOZ) = 50^\circ \Rightarrow 13 \cdot (\sphericalangle XOY) + 13 \cdot (\sphericalangle YOZ) = 650^\circ \dots 1p$

$13(\sphericalangle XOY) + 12(\sphericalangle XOY) = 650^\circ \Rightarrow (\sphericalangle XOY) = 26^\circ$  și  $(\sphericalangle YOZ) = 24^\circ \dots 2p$

b)  $\sphericalangle YON = 12^\circ$ ,  $\sphericalangle MOY = 13^\circ$ ,  $\sphericalangle MOL = 12^\circ 30'$  ..... 1p

$\sphericalangle LOY = (\sphericalangle MOY) - (\sphericalangle MOL) = 13^\circ - 12^\circ 30' = 30' < 1^\circ \dots 1p$